Hærdnende plastiske materialer

Rathkjen, Arne

Publication date:
1999

Document Version
Tidlig version også kaldet pre-print

Link to publication from Aalborg University

Citation for published version (APA):
Rathkjen, A. (1999). *Hærdnende plastiske materialer*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet. U/ Bind U9914

INSTITUTTET FOR BYGNINGSTEKNIK

DEPT. OF BUILDING TECHNOLOGY AND STRUCTURAL ENGINEERING
AALBORG UNIVERSITET • AAU • AALBORG • DANMARK

TEAM 1999.3

A. RATHKJEN
HÆRDNENDE PLASTISKE MATERIALER
SEPTEMBER 1999

ISSN 1395-8232 U9914

HÆRDNENDE PLASTISKE MATERIALER

1. ISOTROPE BRUD- OG FLYDEBETINGELSER
2. DEFORMATIONSHÆRDNING
3. FLYDELOVEN
4. KONSISTENSBETINGELSEN
5. EN ELASTOPLASTISK MATERIALEMODEL

1. ISOTROPE BRUD- OG FLYDEBETINGELSER

For plastiske materialer er en flydebetingelse et ret centralt begreb. En flydebetingelse skal her angives som en skalær funktion af spændingstensoren, en flydefunktion $f(\underset{\sim}{\sigma})$, der antager værdien nul, dvs.

$$f(\underset{\sim}{\sigma}) = 0 \tag{1.1}$$

Når flydebetingelsen (1.1) er opfyldt, vil der forekomme plastiske, dvs. blivende, tøjningsændringer. Når det materiale, der skal beskrives, er et isotropt materiale, skal den skalære funktion være en funktion af spændingstensorens hovedinvarianter $I_\sigma\ II_\sigma\ III_\sigma$ eller hovedspændingerne $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ eller tilsvarende. Her er

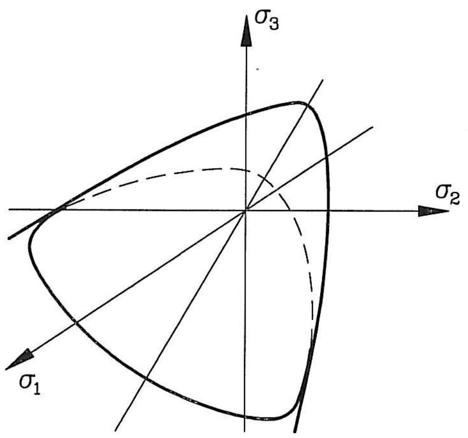
$$\begin{aligned} I_\sigma &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ II_\sigma &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ III_\sigma &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \tag{1.2}$$

og som tilsvarende kan man f.eks. benytte

$$\begin{aligned} I_\sigma &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_{\sigma^2} &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 \\ I_{\sigma^3} &= \sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3 \end{aligned} \tag{1.3}$$

For anisotrope materialer bliver flydefunktionen en funktion af flere end 3 skalære argumenter.

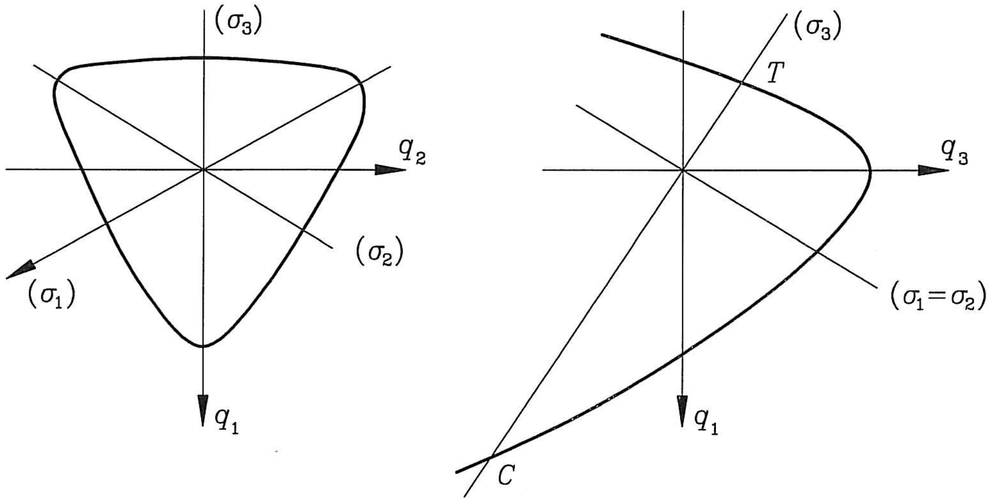
Da isotrope flydefunktioner er funktioner af netop 3 parametre kan isotrope flydebetingelser afbildes som flader i et 3-dimensionalt rum, mens anisotrope flydebetingelser må afbildes som hyperflader i flerdimensionale hyperrum. Et eksempel på en flydeflade i hovedspændingsrummet (Haigh og Westergaard) er vist i figur 1.1. Nogle snit i fladen er vist i figur 1.2.



Figur 1.1

hvor de viste akser q_1, q_2 og q_3 fremkommer ved transformationen

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$



π−plan *Rendulic−plan*

Figur 1.2

Den tredie hovedinvariant $III_{\underset{\sim}{\sigma}} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ er af tredie grad, hvilket gør anvendelsen af flydefunktioner, der omfatter alle tre hovedinvarianter, ret besværlig. Kun funktioner af invarianterne $I_{\underset{\sim}{\sigma}}$ og $II_{\underset{\sim}{\sigma}}$ alene skal derfor behandles her.

En generel flydebetingelse af anden grad kan skrives

$$f = I_\sigma^2/CT - II_\sigma/S^2 + (C-T)I_\sigma/CT - 1 = 0 \tag{1.5}$$

hvor C er den enaksede trykstyrke, T er den enaksede trækstyrke og S er forskydningsstyrken. Udtrykt ved spændingskomponenterne i et vilkårligt x, y, z-koordinatsystem bliver flydebetingelsen

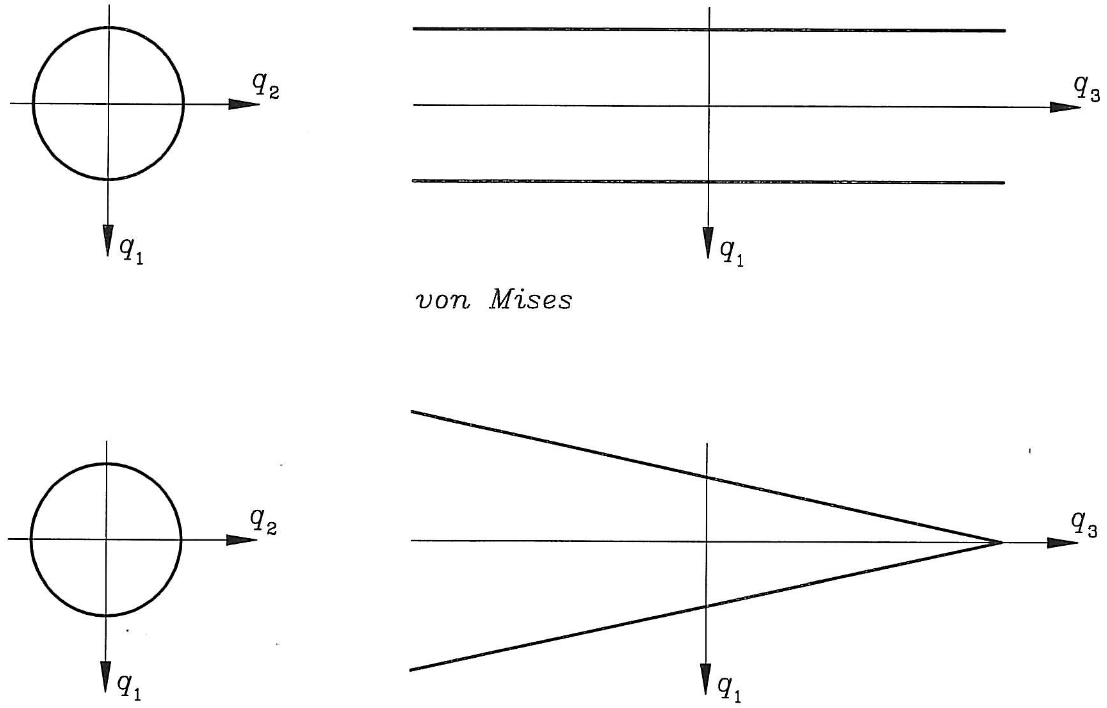
$$\begin{aligned} f = {} & \left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)^2/CT - \left(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}\right)/S^2 \\ & + \left(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2\right)/S^2 + (C-T)\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)/CT - 1 = 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Med $C = T$ og $S^2 = C^2/3$ fås von Mises' flydebetingelse og med $3S^2(C+T)^2 = 4C^2T^2$ fås Drucker-Prager betingelsen.

I q_1, q_2, q_3-systemet har man

$$f = 2(3S^2 - CT)q_3^2 + CT(q_1^2 + q_2^2) + 2\sqrt{3}(C-T)S^2 q_3 - 2CTS^2 = 0 \tag{1.7}$$

som skærer q_1, q_2-planen i en cirkel med radius $\sqrt{2}S$, altså en omdrejningsflade med q_3-aksen som omdrejningsakse. von Mises' flydebetingelse og Drucker-Pragers flydebetingelse er vist i figur 1.3.



Figur 1.3

Når man ser bort fra spændingstensorens tredie hovedinvariant og sætter

$$
\begin{aligned}
p &= I_\sigma/3 = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3 \\
q^2 &= I_\sigma^2 - 3II_\sigma = \\
&= \big((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2\big)/2 + 3\big(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2\big)
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

hvor både p og q har dimension af spænding, kan flydebetingelsen (1.5) skrives

$$f = 3\big((3S^2 - CT)p^2 + S^2(C - T)p\big) + CTq^2/3 - CTS^2 = 0 \tag{1.9}$$

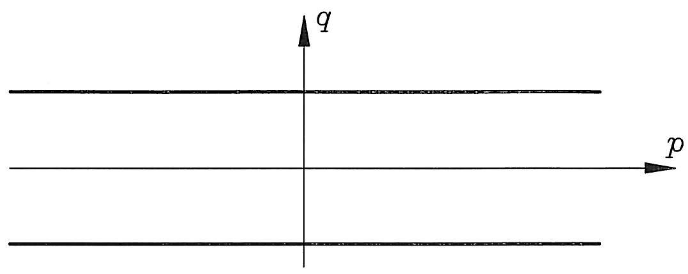
I et p, q-koordinatsystem bliver von Mises' flydebetingelse

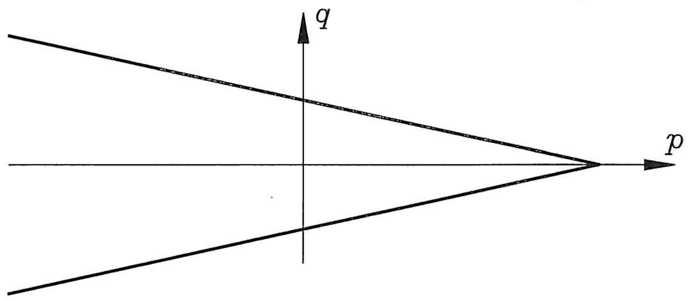
$$q^2 = T^2 \tag{1.10}$$

og Drucker-Pragers flydebetingelse bliver

$$(C + T)^2 q^2 = \big(3(C - T)p - 2CT\big)^2 \tag{1.11}$$

De afbildes i p, q-planen, som vist i figur 1.4



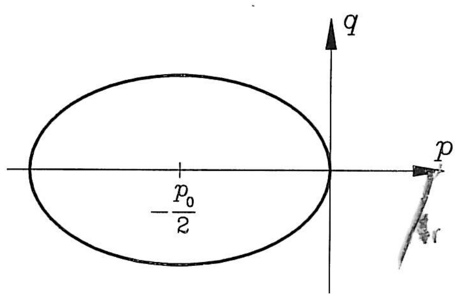


Figur 1.4

For jord benyttes foruden Coulombs brudbetingelse, som ikke skal omtales her, blandt andet Drucker-Prager betingelsen og betingelsen

$$f = q^2 + M^2(p + p_0/2)^2 - M^2 p_0^2/4 = 0 \tag{1.12}$$

som afbildes i den i figur 1.5 viste ellipse.

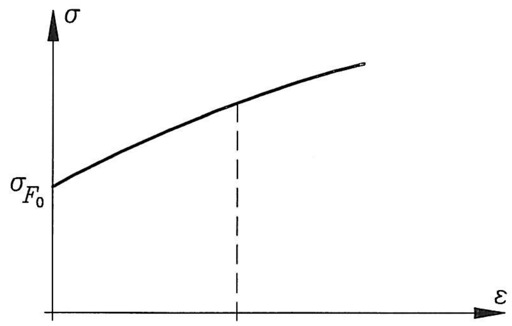


Figur 1.5

Betingelsen (1.12) er konstrueret, så den enaksede trækstyrke og dermed forskydningsstyrken altid er nul, og betingelsen kommer derfor ikke ind under formatet (1.5).

2. DEFORMATIONSHÆRDNING

Adskillige plastiske materialer udviser *deformationshærdning*, dvs. der skal som vist i figur 2.1 stadig større spændinger til at fremkalde plastiske tøjningsændringer. I stedet

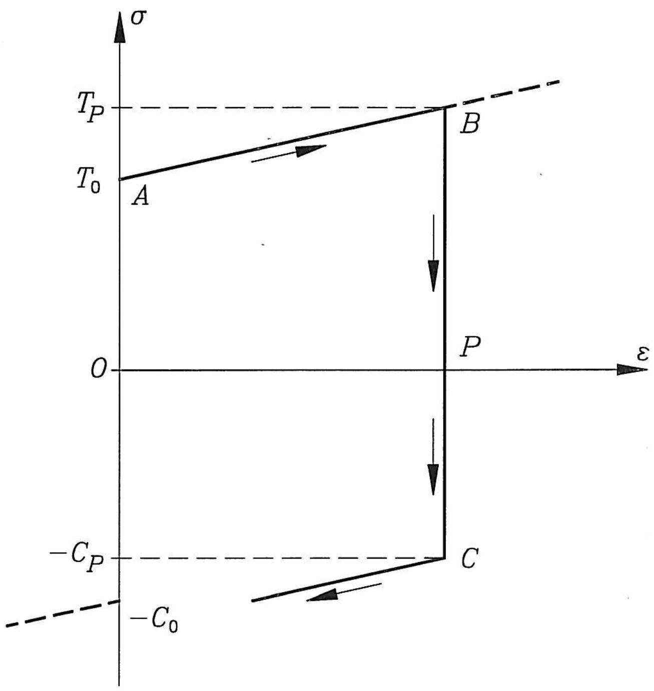


Figur 2.1

for en flydebetingelse $f(\underset{\sim}{\sigma}) = 0$ som er en funktion af spændingstensoren alene, benyttes nu en flydebetingelse

$$f(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\kappa}) = 0 \tag{2.1}$$

som udover at være en funktion af spændingstensoren $\underset{\sim}{\sigma}$ også er en funktion af en *hærdningsparameter* $\underset{\sim}{\kappa}$. Denne hærdningsparameter kan f.eks. være en funktion af den



Figur 2.2

plastiske tøjning $\underset{\sim}{\varepsilon}$. Figur 2.2 viser i et σ, ε-diagram en deformationsproces, hvor materialet føres fra ubelastet tilstand i punkt O til trækflydning i punkt A, videre under udvikling af plastiske tøjninger til punkt B, hvorfra der aflastes. Under aflastningen er de plastiske tøjningsændringer nul, og først når spændingen når en værdi svarende til punkt C, vil der igen udvikles plastiske tøjningsændringer, denne gang svarende til trykflydning. Svarende til den plastiske tøjning $\varepsilon = OP$ betegnes flydespændingerne i henholdsvis træk og tryk med T_P og C_P og flydebetingelsen kan i dette endimensionale tilfælde skrives

$$f = (\sigma - T_P)(\sigma + C_P) = \sigma^2 + (C_P - T_P)\sigma - C_P T_P = 0 \tag{2.2}$$

Hvordan T_P og C_P afhænger af den plastiske tøjning ε via hærdningsparameteren κ, beskrives ved hjælp af *hærdningsregler*. Nogle simple eksempler knyttet til den initiale flydebetingelse

$$f = \sigma^2 - T^2 = 0 \tag{2.3}$$

svarende til $T_0 = C_0 = T$, skal herefter gennemgås.

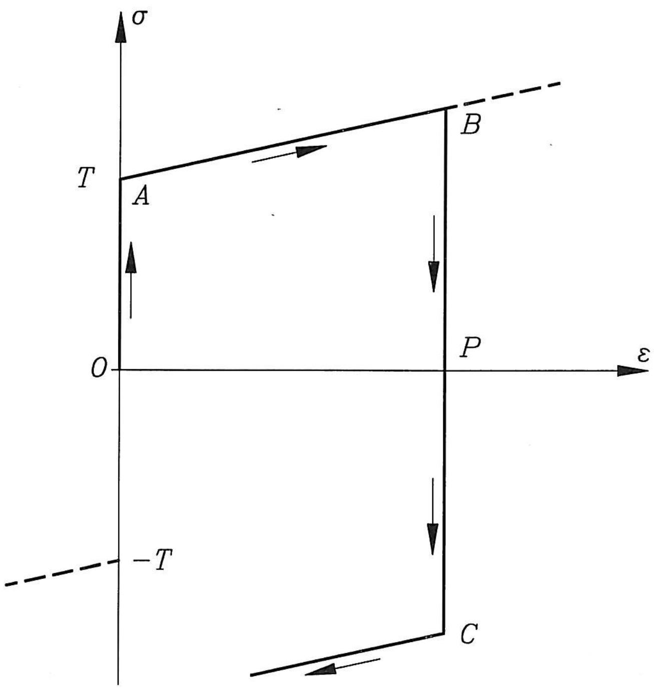
Erstatter man i flydebetingelsen (2.3) T^2 med κ^2 har man flydebetingelsen

$$f = \sigma^2 - \kappa^2 = 0 \tag{2.4}$$

som sammen med hærdningsreglen

$$\kappa = T + H\varepsilon \tag{2.5}$$

hvor H er en konstant, giver deformationsprocessen vist i figur 2.3



Figur 2.3

Denne form for hærdning kaldes *isotrop hærdning*, og man har flydespændingerne

$$T_P = C_P = T + H\varepsilon \tag{2.6}$$

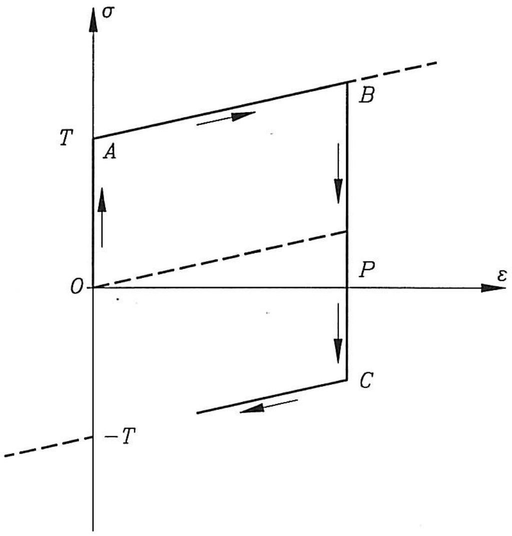
Erstatter man i stedet i flydebetingelsen (2.3) σ^2 med $(\sigma - \kappa)^2$, har man flydebetingelsen

$$f = (\sigma - \kappa)^2 - T = 0 \tag{2.7}$$

som sammen med hærdningsreglen

$$\kappa = K\varepsilon \tag{2.8}$$

hvor K er en konstant, giver deformationsprocessen vist i figur 2.4.



Figur 2.4

Denne form for hærning kaldes *kinematisk hærdning*, og man har flydespændingerne

$$\begin{aligned} T_P &= T + K\varepsilon \\ C_P &= T - K\varepsilon \end{aligned} \tag{2.9}$$

Kinematisk hærdning kan beskrive det fænomen, at den aktuelle trykflydespænding C_P er mindre end den initiale trykflydespænding $C = T$, den såkaldte Bauschingereffekt, et fænomen som isotrop hærdning ikke kan beskrive.

Det todimensionale tilfælde kan f.eks. illustreres ved den initiale flydebetingelse

$$f = \sigma_{xx}^2 + 3\sigma_{xy}^2 - T^2 = 0 \tag{2.10}$$

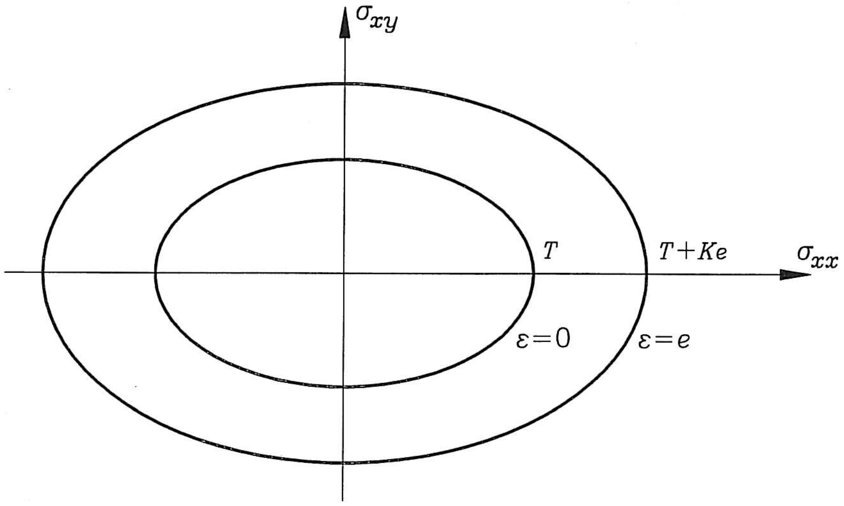
der med κ i stedet for T bliver

$$f = \sigma_{xx}^2 + 3\sigma_{xy}^2 - \kappa^2 = 0 \tag{2.11}$$

som sammen med hærdningsreglen

$$\kappa = T + H\varepsilon \tag{2.12}$$

afbildes i de i figur 2.5 viste flydeflader



Figur 2.5

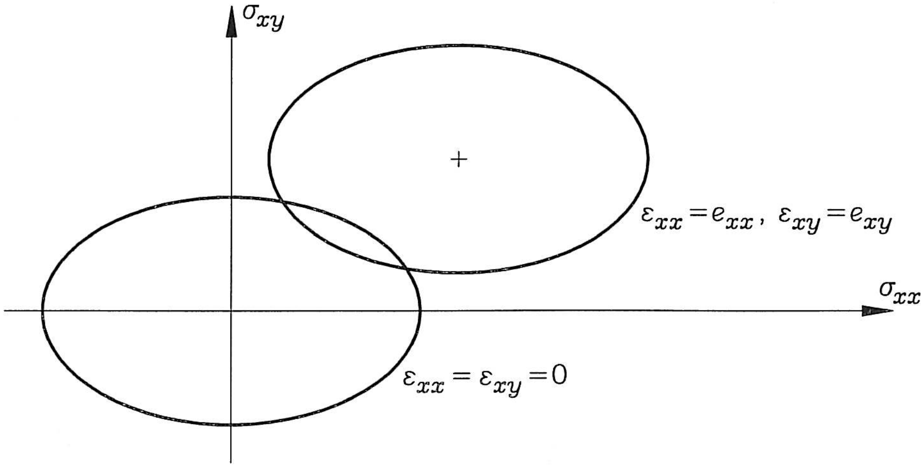
Med $(\sigma_{xx} - \kappa_{xx})$ og $(\sigma_{xy} - \kappa_{xy})$ i stedet for henholdsvis σ_{xx} og σ_{xy} i (2.10) bliver flydebetingelsen

$$f = (\sigma_{xx} - \kappa_{xx})^2 + 3(\sigma_{xy} - \kappa_{xy})^2 - T^2 = 0 \tag{2.13}$$

som sammen med hærdningsreglerne

$$\begin{aligned} \kappa_{xx} &= K_{xx}\varepsilon_{xx} \\ \kappa_{xy} &= K_{xy}\varepsilon_{xy} \end{aligned} \tag{2.14}$$

afbildes i de i figur 2.6 viste flydeflader



Figur 2.6 Kinematisk hærdning

3. FLYDELOVEN

Det antages, at de plastiske tøjningstilvækster $d\underset{\sim}{\varepsilon}$ kan bestemmes af *flydeloven*

$$d\underset{\sim}{\varepsilon} = d\mu \partial g / \partial \underset{\sim}{\sigma} \tag{4.1}$$

hvor $g(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\kappa})$ er *det plastiske potentiale*, der ligesom flydefunktionen f er en funktion af spændingstensoren $\underset{\sim}{\sigma}$ og hærdningsparameteren $\underset{\sim}{\kappa}$,

$$g = g(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\kappa}) \tag{3.2}$$

og $d\mu$ er en skaleringsfaktor.

Med

$$\begin{aligned} \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} &= d\underset{\sim}{\varepsilon} / d\alpha \\ \lambda &= d\mu / d\alpha \end{aligned} \tag{3.3}$$

hvor α er en monotont voksende evolutionsparameter, og hvor $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}$ kaldes den plastiske tøjningsændring, kan flydeloven skrives

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \lambda \partial g / \partial \underset{\sim}{\sigma} \tag{3.4}$$

For materialer, hvor man kan bruge flydefunktionen som plastisk potentiale, $g = f$, kaldes

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \lambda \partial f / \partial \underset{\sim}{\sigma} \tag{3.5}$$

den *associerede flydelov* eller, da $\partial f / \partial \underset{\sim}{\sigma}$ er normal til fladen $f = 0$ for fastholdt $\underset{\sim}{\kappa}$, *normalitetsbetingelsen*.

For isotrope materialer med det plastiske potentiale givet som en funktion af spændingstensorens hovedinvarianter I_σ, II_σ og III_σ bestemmes den plastiske tøjningsændring ved

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \lambda \partial g / \partial \underset{\sim}{\sigma} = \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial I_\sigma} \frac{\partial I_\sigma}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial II_\sigma} \frac{\partial II_\sigma}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} + \frac{\partial g}{\partial III_\sigma} \frac{\partial III_\sigma}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \right) \tag{3.6}$$

Da man har

$$\begin{aligned} \partial I_\sigma / \partial \underset{\sim}{\sigma} &= \underset{\sim}{I} \\ \partial II_\sigma / \partial \underset{\sim}{\sigma} &= I_\sigma \underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{\sigma}^T \\ \partial III_\sigma / \partial_{\underset{\sim}{\sigma}} &= II_\sigma \underset{\sim}{I} - I_\sigma \underset{\sim}{\sigma}^T + (\underset{\sim}{\sigma}^T)^2 = III_\sigma \underset{\sim}{\sigma}^{-T} \end{aligned} \tag{3.7}$$

bliver

$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}} = \lambda\Big(\underset{\sim}{I}\partial g/\partial I_\sigma + (I_\sigma \underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{\sigma})\partial g/\partial II_\sigma +$$
$$+ (II_\sigma \underset{\sim}{I} - I_\sigma \underset{\sim}{\sigma} + \underset{\sim}{\sigma}^2)\partial g/\partial III_\sigma\Big) \tag{3.8}$$

Benyttes for eksempel flydebetingelsen (1.5) som plastisk potentiale dvs.

$$g = I_\sigma^2/CT - II_\sigma/S^2 + (C-T)I_\sigma/CT - 1 \tag{3.9}$$

og dermed

$$\begin{aligned} \partial g/\partial I_\sigma &= (2I_\sigma + C - T)/CT \\ \partial g/\partial II_\sigma &= -1/S^2 \\ \partial g/\partial III_\sigma &= 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

bliver den plastiske tøjningsændring

$$\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}} = \lambda((2I_\sigma + C - T)\underset{\sim}{I}/CT - (I_\sigma \underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{\sigma})/S^2) \tag{3.11}$$

Den relative volumenændring $(dv - dV)/dV$ er lig med første tøjningsinvariant

$$(dv - dV)/dV = I_\varepsilon = \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{\varepsilon} \tag{3.12}$$

Den relative volumenændringshastighed bliver derfor første tøjningsændringsinvariant $I_{\dot{\varepsilon}}$. For et Drucker-Prager materiale $\big(3S^2(C+T)^2 = 4C^2T^2\big)$ finder man

$$I_{\dot{\varepsilon}} = \lambda(C-T)\big(2CT - (C-T)I_\sigma\big)/4C^2T^2 = \lambda'\big(2CT - (C-T)I_\sigma\big) \tag{3.13}$$

og for et von Mises materiale $(C = T\ ,\ S^2 = C^2/3)$ bliver

$$I_{\dot{\varepsilon}} = 0 \tag{3.14}$$

4. KONSISTENSBETINGELSEN

Når det for en værdi af evolutionsparameteren α gælder, at flydebetingelsen er opfyldt, $f = 0$, er der tre muligheder, når α ændres til $\alpha + d\alpha$. Ved fortsat flydning gælder stadigvæk $f = 0$ og dermed *konsistensbetingelsen*

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : \frac{d\underset{\sim}{\sigma}}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\kappa}} : \frac{d\underset{\sim}{\kappa}}{d\alpha} = 0 \tag{4.1}$$

Antages hærdningsparameteren $\underset{\sim}{\kappa}$ f.eks. at være en funktion af den plastiske tøjning $\underset{\sim}{\varepsilon}$ alene har man

$$\frac{d\underset{\sim}{\kappa}}{d\alpha} = \frac{d\underset{\sim}{\kappa}}{d\underset{\sim}{\varepsilon}} : \frac{d\underset{\sim}{\varepsilon}}{d\alpha} = \lambda \frac{d\underset{\sim}{\kappa}}{d\underset{\sim}{\varepsilon}} : \frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \tag{4.2}$$

og med

$$\begin{aligned} l &= \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : \frac{d\underset{\sim}{\sigma}}{d\alpha} \\ h &= -\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\kappa}} : \frac{d\underset{\sim}{\kappa}}{d\underset{\sim}{\varepsilon}} : \frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \end{aligned} \tag{4.3}$$

kan konsistensbetingelsen skrives

$$l - \lambda h = 0 \tag{4.4}$$

hvoraf λ og dermed $\dot{\varepsilon}$ kan bestemmes, når h er forskellig fra nul.

$h = 0$ forekommer når $\partial f / \partial \underset{\sim}{\kappa} \equiv 0$, ideal plasticitet, og λ er ubestemt med mindre processen er beskrevet ved tøjningsændringerne $\dot{\varepsilon}$.

Den anden mulighed ved ændringen fra α til $\alpha + d\alpha$ er, at det stadig gælder at flydebetingelsen er opfyldt, $f = 0$, men hærdningsparameteren $\underset{\sim}{\kappa}$ ændres ikke, $d\underset{\sim}{\kappa}/d\alpha = \underset{\sim}{0}$, hvilket medfører $h = 0$ og dermed $l = 0$, da konsistensbetingelsen stadigvæk er opfyldt. Yderligere ses det af (4.2), at λ og dermed $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}$ må være nul, når $d\underset{\sim}{\kappa}/d\alpha$ skal være nul. Dette er en følge af antagelsen om, at hærdningsparameteren $\underset{\sim}{\kappa}$ er en funktion af den plastiske tøjning $\underset{\sim}{\varepsilon}$ alene.

Hvis der skal ske plastiske tøjningsændringer uden at $\underset{\sim}{\kappa}$ ændres, må hærdningsparameteren være en funktion af andet end den plastiske tøjning alene.

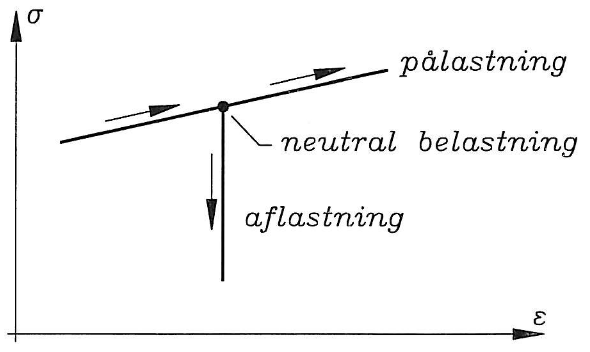
Endelig er der den tredie mulighed, at $df/d\alpha < 0$ hvorefter $f < 0$, dvs. flydebetingelsen er ikke længere opfyldt, og de plastiske tøjningsændringer er nul, $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \underset{\sim}{0}$.

De tre belastningstilfælde betegnes henholdsvis pålastning, neutral belastning og aflastning.

$f = 0$	$l > 0$	$h \neq 0$	$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} \neq \underset{\sim}{0}$	pålastning
$f = 0$	$l = 0$	$h = 0$	$(\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \underset{\sim}{0})$	neutral belastning
$f = 0$	$l < 0$	$h = 0$	$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \underset{\sim}{0}$	aflastning

Tabel 4.1

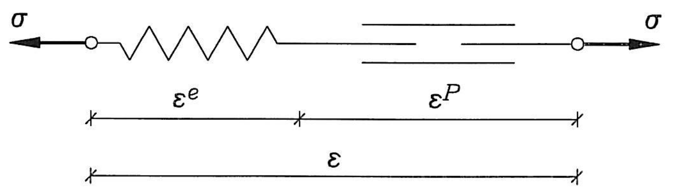
I tabel 4.1 er de tre tilfælde resumeret sammen med en angivelse af om funktionerne l, h og d er lig med eller forskellig fra nul, og i figur 4.1 er σ, ε-sammenhængen vist i det enaksede tilfælde



Figur 4.1

5. EN ELASTOPLASTISK MATERIALEMODEL

Den symbolske model i figur 5.1 består af et elastisk element anbragt i serie med et pla-



Figur 5.1

stisk element. For denne model ønskes sammenhænge mellem spændingsændringerne

$$\dot{\underset{\sim}{\sigma}} = d\underset{\sim}{\sigma}/d\alpha \tag{5.1}$$

og tøjningsændringerne

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = d\underset{\sim}{\varepsilon}/d\alpha \tag{5.2}$$

Af figuren fremgår, at den totale tøjning $\underset{\sim}{\varepsilon}$ er lig med summen af den elastiske tøjning $\underset{\sim}{\varepsilon}^e$ og den plastiske tøjning $\underset{\sim}{\varepsilon}^p$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \varepsilon^e + \varepsilon^p \tag{5.3}$$

mens spændingen i såvel det elastiske element som i det plastiske element er lig med den totale spænding

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma}^e = \underset{\sim}{\sigma}^p \tag{5.4}$$

Det elastiske element forudsættes at være lineærelastisk

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\sigma}^e &= \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon}^e \\ \underset{\sim}{\varepsilon}^e &= \underset{\sim}{S} : \underset{\sim}{\sigma}^e \end{aligned} \tag{5.5}$$

hvor $\underset{\sim}{C}$ er stivhedstensoren og $\underset{\sim}{S}$ er fleksibilitetstensoren.

Først skal tøjningsændringerne udtrykkes ved spændingsændringerne. Man har

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^e + \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p \tag{5.6}$$

hvor

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^e = \underset{\sim}{S} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}} \tag{5.7}$$

og

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \lambda \partial g / \partial \underset{\sim}{\sigma} \tag{5.8}$$

Af konsistensbetingelsen (4.4), $l - \lambda h = 0$ fås

$$\lambda = l/h \tag{5.9}$$

hvor

$$\begin{aligned} l &= \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : \dot{\sigma} \\ h &= -\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\kappa}} : \frac{\partial \underset{\sim}{\kappa}}{\partial \underset{\sim}{\varepsilon}} : \frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \end{aligned} \tag{5.10}$$

dvs.

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p = \frac{l}{h} \frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} = \frac{1}{h} \frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \left(\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}} \right) \tag{5.11}$$

så den totale tøjningsændring bliver

$$\dot{\varepsilon} = \left(\underset{\sim}{S} + \frac{1}{h} \frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \right) : \dot{\underset{\sim}{\sigma}} \tag{5.12}$$

Denne relation kan skrives

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \underset{\sim}{S}^{ep} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}} \tag{5.13}$$

hvor den elastoplastiske fleksibilitetstensor $\underset{\sim}{S}^{ep}$ er givet ved parentesen i (5.12)

Herefter skal spændingsændringerne udtrykkes ved tøjningsændringerne. I den konstitutive ligning $\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon}^e$ indsættes den elastiske tøjning som differensen mellem den totale og den plastiske tøjning, dvs.

$$\dot{\underset{\sim}{\sigma}} = \underset{\sim}{C} : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^e = \underset{\sim}{C} : (\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} - \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p) = \underset{\sim}{C} : (\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} - \lambda \partial g / \partial \underset{\sim}{\sigma}) \tag{5.14}$$

Konsistensbetingelsen er

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\alpha} &\doteq \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\kappa}} : \frac{\partial \underset{\sim}{\kappa}}{\partial \underset{\sim}{\varepsilon}^p} : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^p \\ &= \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : C : \left(\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \right) - h\lambda = 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

hvor h er bestemt ved (5.10). Af (5.15) fås

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : \underset{\sim}{C} : \dot{\varepsilon}}{h + \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : \underset{\sim}{C} : \frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}} \tag{5.16}$$

som indsat i (5.14) giver

$$\dot{\underset{\sim}{\sigma}} = \left(\underset{\sim}{C} - \frac{\underset{\sim}{C} : \frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : \underset{\sim}{C}}{h + \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : \underset{\sim}{C} : \frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{\sigma}}} \right) : \dot{\varepsilon} \tag{5.17}$$

der kan skrives

$$\dot{\underset{\sim}{\sigma}} = \underset{\sim}{C}^{ep} : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} \tag{5.18}$$

hvor den elastoplastiske stivhedstensor $\underset{\sim}{C}^{ep}$ er givet ved parentesen i (5.17).

Relationerne (5.13) og (5.18) gælder ved pålastning og neutral belastning. Ved aflastning og for $f < 0$ er forholdene rent elastiske og (5.5) gælder.

Anvendelse af ovenstående formelapparat kræver kendskab til følgende

1. elasticitetstensoren $\underset{\sim}{C}$ eller $\underset{\sim}{S}$

2. flydefunktionen $f(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\kappa})$

3. det plastiske potentiale $g(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\kappa})$

4. hærdningsreglen $\underset{\sim}{\kappa}(\underset{\sim}{\varepsilon})$